# 楕円形方程式に対するRiccati不等式のある応用(非線形の数理と関数方程式)



宇佐美, 広介

数理解析研究所講究録
1034巻 1998年 89-100



# 楕円型方程式に対するRiccati不等式のある応用

広島大総合科　宇佐美　広介（Hiroyuki Usami）

## 0. 序

$\alpha > 1$ として

$$h' = \frac{|h|^{\alpha}}{p(r)} + q(r),$$

$$h' \geq \frac{|h|^{\alpha}}{p(r)} + q(r) \qquad (R)$$

の形の常微分方程式や不等式は（一般化された）Riccati方程式［不等式］と呼ばれる。$\alpha = 2$ のときが本来のものである。

$\alpha = 2$ のとき、Riccati不等式(R)の $+\infty$ の近傍における解の存在性と2階線形常微分方程式

$$(p(r)z')' + q(r)z = 0 \qquad (L)$$

の解の振動性との間の密接な関係はよく知られている。つまり次が成り立つ：

<u>定理A</u>．（$\alpha=2$）　$p$，$q$ は $+\infty$ の近傍で定義された連続関数，$p(r)>0$ とする。このとき

（R）が $+\infty$ の近傍での解を持たない

$\Longleftrightarrow$ ODE（L）の解は全て振動的 ■

この定理の証明は [1] を参照のこと。

$\alpha \neq 2$ のときも（R）と準線形ODE

$$(p(r)|z'|^{\alpha-2}z')' + q(r)|z|^{\alpha-2}z = 0$$

との間に類似の結果の成り立つことが知られている。

この定理Aを用いてODE（L）の解の振動性を研究するという方向の結果は沢山ある。最近筆者は、同様な議論は次元を上げて2階楕円型偏微分方程式に対しても成り立つのではないのかと思い色々考えてみた。今日はその際分ったことを幾つかの実例でもって速報する。以下各々の節は内容としては独立である。また、証明は割愛する。

尚、この話で現れる（既知）関数はその定義域上少くとも連続としておこう。また、「解」とはいわゆる古典解のこととする。無限積分の収束・発散性が問題になる所があるが、それらは全て improper integral の意味でとられたい；つまり，$\int^{\infty} = \lim_{R\to\infty}\int^{R}$．

## 一 1. 一般化された Riccati 不等式について

第2節以降で使う Riccati 不等式(R)に対する結果をここに羅列しておく。$\alpha > 1$ ; $p$, $q$ はある半無限区間 $[r_0, \infty)$ 上の関数で $p(r) > 0$, $r \geq r_0$, とする。

<u>命題1</u>. $\alpha = 2$, $q(r) \geq 0$, $r \geq r_0$ とする。

(i) $\int^\infty dr/p(r) = \infty \Longrightarrow$ (R) は $+\infty$ の近傍での正値な解を持たない。

(ii) $\int^\infty dr/p(r) < \infty$ のとき、更に次の3条件のうちのいずれかが成り立てば(R)は $+\infty$ の近傍での解を持たない：

$$\int^\infty \left( \int_r^\infty \frac{ds}{p(s)} \right)^2 q(r)\, dr = \infty ,$$

$$\liminf_{r\to\infty} \left( \int_r^\infty \frac{ds}{p(s)} \right)^{-1} \int_r^\infty \left( \int_s^\infty \frac{dt}{p(t)} \right)^2 q(s)\, ds > \frac{1}{4},$$

$$\limsup_{r\to\infty} \left( \int_r^\infty \frac{ds}{p(s)} \right)^{-1} \int_r^\infty \left( \int_s^\infty \frac{dt}{p(t)} \right)^2 q(s)\, ds > 1. \qquad \blacksquare$$

この命題は定理Aに注意すれば、実質的には ODE(L) の振動定理からの帰結であることが分る。詳しくは [1] を参照のこと。

次に $q$ が必ずしも非負値とは限らない場合を考えよう。種

種の結果があると思うが、ここでは最近筆者が使い回しているもののみ挙げておく：

命題2（[4]）。次のような$C^1$-関数$\varphi:[r_1,\infty)\to(0,\infty)$が存在すれば(R)は$+\infty$の近傍での解を持たない：

$$\int^\infty\left[\frac{p(r)\,|\varphi'(r)|^\alpha}{\varphi(r)}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}dr<\infty,\quad \int^\infty\frac{dr}{p(r)[\varphi(r)]^{\alpha-1}}=\infty,$$

かつ

$$\int^\infty \varphi(r)\,g(r)\,dr=\infty.$$

—2．半線形楕円型方程式のある種の振動定理

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^N D_i\left(a_{ij}(x)D_ju\right),\qquad x\in\Omega,$$

という2階楕円型作用素を考える；ここにおいて$\Omega(\subset \mathbb{R}^N,\ N\geqq 2)$は外部領域。また、正値対称行列$(a_{ij}(x))$の最大固有値，最小固有値を各々$\Lambda(x)$, $\lambda(x)$で表す。

さて次のPDEを考えよう：

$$Lu+a(x)f(u)=0, \tag{1}$$

ここにおいて次を仮定する：

$$\left.\begin{array}{l} a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N ; \\ f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\ \text{奇関数}; \\ f'(u) > 0,\quad u \neq 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

<u>定理 1</u>。$u$ を $\infty$ の近傍で定義された (1) の正値解として

$$I(r) \equiv -\int_{|x|=r} \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \frac{D_j u}{f(u)}\, \frac{x_i}{r}\, dS, \qquad x = (x_i),$$

とおくと $I$ は Riccati 不等式

$$I'(r) \geqq \left( \int_{|x|=r} \frac{[\Lambda(x)]^2}{\lambda(x)} \frac{dS}{f'(u)} \right)^{-1} [I(r)]^2 + \omega_N r^{N-1} \overline{a}(r)$$

を満たす；ここにおいて $\omega_N = \int_{|x|=1} dS$,

$$\overline{a}(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} a(x)\, dS \quad (a\text{の球面平均}) \tag{3}$$

<u>応用例 1</u>。$\limsup_{|x|\to\infty} [\Lambda(x)]^2/\lambda(x) < \infty$ としよう；例えば $L$ が $\Omega$ 上一様楕円型ならばそうである。命題 2 を $\alpha = 2$ として用いて以下を得る：

(i) $f(u) \equiv u$ のとき, i.e. 線形のとき.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{s.t.} \int^{\infty} r^{1-\varepsilon}\, \overline{a}(r)\, dr = \infty \tag{4}$$

$\Longrightarrow$ (1)の解は全て振動的。([3]に類似の結果がある。)

(ii) $f'(u)$ が非減少関数のとき:(4) $\Longrightarrow$ (1)の定符号解 $u$ は全て $\liminf_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0$。

(iii) $f'(u)$ が非増加関数のとき:(4) $\Longrightarrow$ (1)の有界な解は全て振動的。 ■

念のため「振動的」の定義を与えておく。$\infty$ の近傍で定義される(1)の非自明解 $u$ は $\infty$ に発散する零点列, すなわち

$$u(x^{(k)})=0,\ k\in\mathbb{N}\ ; \quad \lim_{k\to\infty}|x^{(k)}|=\infty$$

となる点列 $\{x^{(k)}\}$ を持つとき振動的といわれる。次節でも同じ意味で用いられるであろう。

先ほどの例において $L=\Delta$ のときを考えると条件(4)はある意味で最良であることが分る。例えば条件「$\varepsilon>0$」を「$\varepsilon\geq 0$」に緩めるのは一般には不可能である。(第3節を参照のこと。)

## —3. 準線形楕円型方程式のある種の振動定理

前節のような話は準線形の作用素に対しても適用できる場合がある。例として退化ラプラス作用素をとりあげよう。つ

まり $\Delta_m u \equiv \mathrm{div}(|Du|^{m-2}Du)$, $m>1$, として方程式

$$\Delta_m u + a(x)f(u) = 0 \tag{5}$$

を考える。ここにおいて $a$, $f$ は (2) を満たすものとする。

<u>定理2.</u> $u$ を $\infty$ の近傍で定義された (5) の正値解として

$$I(r) \equiv -\int_{|x|=r} \frac{|Du|^{m-2}}{f(u)} \left(Du, \frac{x}{r}\right) dS \quad ((\cdot,\cdot): R^N \text{の内積})$$

とおくと $I$ は一般化された Riccati 不等式

$$I'(r) \geq \left(\int_{|x|=r} \frac{(f(u))^{m-2}}{(f'(u))^{m-1}} dS\right)^{-1} |I(r)|^{\frac{m}{m-1}} + \omega_N r^{N-1} \overline{a}(r)$$

を満たす。($\omega_N$, $\overline{a}$ は前節で用いたもの。)

<u>応用例2。</u> (5) で特に $f(u) = |u|^{\sigma-2}u$, $\sigma>1$, の場合を考えよう:

$$\Delta_m u + a(x)|u|^{\sigma-2}u = 0. \tag{6}$$

命題2を用いて次を得る:

(i) $\sigma = m$ のとき ("half-linear" と形容されることがある):

$$^{\exists}\varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \int^{\infty} r^{m-1-\varepsilon}\overline{a}(r)\,dr = \infty \tag{7}$$

$\Rightarrow$ (6) の解は全て振動的。([4] で既報告)

(ii) $\sigma > m$ のとき：(7) $\Rightarrow$ (6) の定符号解 $u$ は全て $\liminf_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0$。

(iii) $\sigma < m$ のとき：(7) $\Rightarrow$ (6) の有界な解は全て振動的。■

この例においても条件 (7) はある意味で最良である。条件「$\varepsilon > 0$」を「$\varepsilon \geq 0$」に緩めるのは一般には不可能([4])。また、$N > m$ かつ $a$ が球対称で $a(x) = O(|x|^{-m+2-\varepsilon})$ ($|x| \to \infty$ のとき) がある $\varepsilon > 0$ に対して成り立っているならば (6) は球対称な解 $u$ で $\lim_{|x|\to\infty} u(x) =$ 定数 $\neq 0$ となるものを持つことが知られている。しかるにこのとき $\int^{\infty} r^{m-1}|\bar{a}(r)|\,dr < \infty$ であるから、やはり (7) は良い条件といえよう。

## —4. 半線形楕円型方程式に対する Liouville 型定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, を $\partial\Omega$ が滑らかな外部領域として再び

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{N} D_i\left(a_{ij}(x) D_j u\right), \quad x \in \bar{\Omega}$$

という楕円型作用素を考える。この節では $L$ は一様楕円型と仮定しよう。つまり $\bar{\Omega}$ 上の正値対称行列 $(a_{ij}(x))$ の最小固有値 $\lambda(x)$, 最大固有値 $\Lambda(x)$ に対して

$$0 < \inf_{\overline{\Omega}} \lambda(x) \leqq \sup_{\overline{\Omega}} \Lambda(x) < \infty .$$

そして次のNeumann型境界値問題を考えよう:

$$\begin{cases} Lu \geqq a(x) u^{\sigma} & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leqq 0 & \text{on } \partial\Omega . \end{cases} \tag{8}$$

ここにおいて $\partial u/\partial \nu$ は $\partial\Omega$ 上co-normal方向の微分を表し、$\sigma > 0$, $a: \overline{\Omega} \to (0, \infty)$ と仮定する。なお、$\Omega = \mathbb{R}^N$ のときは当然境界条件は考えないものとする。

**定理3.** $u$ を境界値問題(8)の正値解として

$$M(r) \equiv \max_{|x|=r} u \qquad (r:\text{十分大})$$

$$I(r) \equiv \int_{\Omega \cap \{x;\, |x| \leqq r\}} \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_i u D_j u \, dx \qquad (r:\text{十分大})$$

とおくと、ある定数 $c_1, c_2 > 0$ ( $r, u$ に依らない) に対して次のRiccati不等式が成り立つ:

$$\left( \int_{|x|=r} u^2 dS \right) I'(r)$$

$$\geqq c_1 [I(r)]^2 + c_2 r^{2N} [a_*(r)]^2 \left( M\left(\frac{7r}{8}\right) \right)^{2+2\sigma} , \tag{9}$$

ここにおいて

$$a_*(r) \equiv \min_{r/2 \leqq |x| \leqq r} a(x)。\quad (r:\text{十分大})$$

この定理を示す際にはいわゆるMoserの不等式を援用する。参考までに掲げておく。[2]を参照のこと。

命題3. $u$を不等式 $Lu \geqq 0$ in $\Omega$ の非負値解, $\beta > 0$を定数とすると、次のような定数 $C = C(N, \beta) > 0$ ($u, R, x_0$ に依らない)が存在する:「$x_0 \in \Omega$, $R > 0$ が $B_{2R}(x_0) \Subset \Omega$なるものならば常に

$$\left(\max_{B_R(x_0)} u\right)^\beta \leqq \frac{C}{R^N}\int_{B_{2R}(x_0)} u^\beta dx$$ 」

ここにおいて $B_\rho(y) = \{x ; |x-y| \leqq \rho\}$。

応用例3. (i) $N = 2$とする。(9)より $I(r) > 0$かつある定数 $c_3 > 0$ に対して

$$I'(r) \geqq \frac{c_3}{r[M(r)]^2}[I(r)]^2$$

よって命題1 (i) より

$$\int^\infty \frac{dr}{r(M(r))^2} < \infty$$

でなければならない。例えば (8) は

$$u(x) = O\left(\sqrt{\log|x|}\right) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty$$

なる正値解は持たないことが分る。

(ii) $N \geqq 3$ とする。命題1 (ii) より

$$\int^{\infty} r^{5-N} [a_*(r)]^2 dr = \infty$$

あるいは

$$\limsup_{r\to\infty} r^{N-2} \int_r^{\infty} s^{5-N} [a_*(s)]^2 ds = \infty$$

ならば (8) は上に有界な正値解を持たないことが分る。たとえば

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \liminf_{|x|\to\infty} |x|^{2-\varepsilon} a(x) > 0$$

ならばそうである。 ∎

$L = \Delta$, $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geqq 3$ のとき方程式

$$\Delta u = a(x) u^{\sigma} \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

は $\int^{\infty} r\left(\max_{|x|=r} a(x)\right) dr < \infty$ ならば有界な正値解を持つことが知られている。特に

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \limsup_{|x|\to\infty} |x|^{2+\varepsilon} a(x) < \infty$$

ならばそうである。これを上の例の (ii) と見比べてみるとこの結果はそんなに悪くないように思える。

定理3はもう少し改良したり変形できると思われる。それに応じてもう少し良いLiouville型定理の判定法も出来そうである。それらについては、またいつか話してみたい。

## 参考文献


[1] P. Hartman, "Ordinary Differential Equations" (第2版) Birkhäuser, 1982.

[2] 村田實・倉田和浩, 岩波講座現代数学の基礎「偏微分方程式1」, 岩波書店, 1997.

[3] E. S. Noussair & C. A. Swanson, Oscillation of semilinear elliptic inequalities by Riccati transformations, Canad. J. Math. 75 (1980), 908-923.

[4] H. Usami, Some oscillation theorems for a class of quasilinear elliptic equations, Ann. Mat. Pura Appl.